

# *Utilizando la historia de la ciencia en la enseñanza de los conceptos claves de la física cuántica*

**Jordi Solbes y Vicent Sinarcas**

Departament de Didàctica de les Ciències  
Experimentals i Socials. Universitat de València.  
IES José Ribera (Xàtiva).

## **Resumen:**

En este artículo se analiza la utilización de la historia de la ciencia para orientar la didáctica de la física cuántica en la enseñanza secundaria. Se repasa la evolución histórica de algunos conceptos clave de la física cuántica y se muestra su implicación en la enseñanza-aprendizaje de la misma.

**Palabras clave:** enseñanza-aprendizaje; física cuántica; historia de la ciencia.

## **Abstract:**

In this article we analyze the use of the history of science to guide the didactics of the Quantum physics in the secondary education. It is reviewed the historical evolution of some key concepts of the Quantum physics and it is shown its implication in their teaching and learning.

**Key Words:** teaching and learning, Quantum physics, history of science.

(Fecha de recepción: abril, 2009, y de aceptación: septiembre, 2009)

## 1. *Introducción*

Muchas investigaciones han puesto de manifiesto la existencia de dificultades no superadas que persisten después del proceso de enseñanza aprendizaje de la física cuántica (Fischler y Lichtfeldt, 1992; Gil y Solbes, 1993; Solbes, 1996; Petri y Niedderer, 1998; Johnston et al., 1998; Kalkanis et al., 2003). En este trabajo vamos a ver como los obstáculos que se manifiestan a lo largo de la historia de la ciencia nos permiten extraer información sobre las dificultades de los estudiantes, si bien la idea de un paralelismo estricto entre ellos ha sido cuestionada (Saltiel y Viennot, 1985; Driver et al. 1989). También trataremos de extraer de dicha historia los problemas significativos por cuanto favorecen la selección de contenidos básicos y es esencial en la elaboración de las situaciones problemáticas simplificadas que se precisan en la enseñanza (Solbes y Traver, 2003).

En las historias más recientes de la ciencia (Sánchez Ron, 1992; Kragh, 2007) se presentan al mismo tiempo la historia “interna” (los científicos y sus descubrimientos) y la “externa” (las relaciones con la tecnología y la sociedad). Aquí nos hemos limitado básicamente a la primera por las razones antes mencionadas y por la gran extensión que tendría este artículo si se trataran las dos, ya que cubre un período de tiempo bastante largo con muchos acontecimientos. Pero se utilizará esta historia externa cuando se elaboren materiales para los estudiantes, ya que la investigación didáctica ha puesto de manifiesto su carácter motivador (Matthews, 1991;

Solbes y Traver, 2001 y 2003), que podría contrarrestar el reciente incremento de actitudes negativas hacia el aprendizaje de la Física y Química en secundaria (Rocard et al., 2007; Solbes et al., 2007; Solbes et al., 2008).

Hemos dividido este apartado en seis partes:

- La primera trata de los orígenes, básicamente los trabajos de Planck y Einstein, donde se puede ver que si bien Planck introdujo la hipótesis de emisión discreta y su constante, fue incapaz de aceptar la estructura discontinua de la radiación introducida por Einstein.
- La segunda sobre la escuela de Bohr, la explicación de los espectros y las reglas de cuantificación para sistemas con muchos grados de libertad, que llevan al modelo de Sommerfeld.
- La tercera sobre la teoría de la radiación y el principio de correspondencia, que no aparece en absoluto en el currículo, pero sin ellos el proceso de constitución de la cuántica es incompleto e incomprensible.
- La cuarta trata de los orígenes y desarrollo de la mecánica cuántica. En ella hemos optado por un desarrollo cronológico en lugar de la presentación típica: mecánica ondulatoria por un lado y mecánica de matrices por otro, sin embargo ambas no se confunden porque aparecen vinculadas a lugares y fechas diferentes.
- La quinta trata sobre los desarrollos fundamentales que completaron la mecánica cuántica (el espín del electrón y el postulado de

simetrización) y sobre las primeras aplicaciones de la mecánica cuántica al estado sólido.

- La sexta sobre los problemas de interpretación.

En cuanto a la bibliografía utilizada encontramos, por una parte, recopilaciones de artículos originales (Van der Waerden, 1968; Butler et al, 1972), de reseñas de artículos (Dugas, 1950), libros de historia de la ciencia (Forman, 1984; Kragh, 2007; Mason, 1985; Mehra, 1976; Moreno, 1987; Sánchez Ron, 1992; Taton, 1973), libros donde los autores clásicos expresan sus ideas sin aparato matemático (Born, 1971; De Broglie, 1965; Heisenberg, 1979; Schrödinger, 1975), libros de texto, clásicos como el de Dirac (1967) y más modernos, con muchas referencias históricas (Galindo y Pascual, 1978; Tipler, 1985); libros sobre la interpretación filosófica de la mecánica cuántica y otras interpretaciones diferentes de la de Copenhague (Lapedra, 2004; Rae, 1989; Selleri, 1986); libros de implicaciones de la cuántica en la tecnología (Eckert y Schubert, 1991; Han, 1992) y, incluso, libros de divulgación (Gribbin, 1988; Navarro, 2009).

## ***1. Crisis de la física continuista: aparición de los cuantos.***

### ***1.1. La radiación del cuerpo negro: antecedentes. La hipótesis de Planck.***

La teoría de la radiación del cuerpo negro fue desarrollada con la ayuda de los métodos de la termodinámica clásica por:

- a) Kirchhoff (Ann Phys (Poggendorf 109 (1860) 207) que demostró que el estado de equilibrio en el que los cambios de energía entre los cuerpos y la radiación contenidos en un recipiente mantenido a temperatura uniforme es único, y corresponde a una distribución de energías entre las diferentes frecuencias perfectamente determinada.

Stefan y Boltzman encontraron que la densidad total de la radiación del cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura.

Wien encontró que el espectro se traslada hacia más altas frecuencias al aumentar la temperatura.

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{cte}$$

lo que se conoce con el nombre de Ley de Desplazamiento.

En 1896 encontró una ley de distribución de la energía que se ajustó a los resultados experimentales. Posteriormente Lummer y Pringsheim encontraron en 1899 que la ley de Wien era solo válida a altas frecuencias.

- b) Rayleigh y Jeans vieron que con argumentos termodinámicos no se podía llegar más lejos y por eso basándose en las leyes del electromagnetismo de Maxwell encontraron una ley de distribución que sí concordaba a bajas frecuencias con los resultados de Lummer y Pringsheim, pero que a altas frecuencias predecía una densidad de energía infinita (catástrofe ultravioleta).

A principio de siglo se tenían dos fórmulas que, como ya hemos visto, ajustaban bien una a altas frecuencias y

la otra a frecuencias próximas a cero. Había que encontrar una nueva expresión que, mediante la interpolación de estas dos, nos diera buen resultado para todo el espectro. Esta fue la labor de Planck que, mediante una hipótesis *ad hoc* (imaginó que la materia estaba formada por osciladores electrónicos que no podían emitir energía más que por cantidades finitas proporcionales a la frecuencia, siendo el factor de proporcionalidad la constante  $h$  -constante de Planck-), encontró la nueva ley de repartición espectral que ajustó con la experiencia y reproducía a altas frecuencias la de Wien y a bajas la de Rayleigh y Jeans.

$$U(\nu, T) = \frac{8\pi h^3}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

El valor numérico de  $h$  fue obtenido desde el principio, solo con datos relativos a la radiación, con gran exactitud, como confirmarían posteriormente las experiencias de Millikan.

### 1.2. El efecto fotoeléctrico.

Experimentalmente, gracias a los trabajos de Hertz (1887), Halwachs (1888), Stoletow (1888) y Lenard (1889), se había comprobado que la materia sometida a radiación de longitud de onda corta emite electrones. La energía cinética de esos electrones es proporcional a la frecuencia e independiente de la intensidad. Por contra, el número de electrones es proporcional a la intensidad. Por otro lado, para cada metal existe una frecuencia umbral  $\nu_0$  para la radiación, de forma que para frecuencias menores que ella no se emiten elec-

trones. La teoría clásica era incapaz de explicar este efecto, ya que según ella la energía se repartía uniformemente en la onda y por lo tanto el electrón recibía energía de una forma continua y proporcional a la intensidad de la onda.

Einstein (Ann Phys, 17 (1905) 132, 20 (1096) 199 y 22 (1907) 180), en su primer artículo supone que la energía es absorbida (y no solo emitida como suponía Planck) discontinuamente. En los otros dos artículos simplemente intenta explicar el rendimiento cuántico del efecto (la relación entre el número de fotones incidentes y el número de electrones emitidos).

Vamos a centrarnos en el primero: en él compara la expresión del cambio de entropía de una radiación electromagnética distribuida según la ley de Wien con la expresión análoga para un sistema de partículas. Se concluye que la radiación monocromática de frecuencia  $\nu$  se comporta como si constara de un número finito de cuantos de energía  $E = h\nu$ . En la nomenclatura actual, debida a G. N. Lewis (Nature 118 (1926) 874), estos cuantos reciben el nombre de fotones. Con este resultado la interpretación del efecto fotoeléctrico es inmediata: la luz de frecuencia  $\nu$  está formada por fotones de energía  $E = h\nu$  que, al incidir sobre el metal, pueden ser absorbidos por los electrones.

La energía del fotón se usa, en parte para liberar al electrón de su ligadura, y en parte para suministrarle una energía cinética, por lo tanto se verificará

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W$$

De esta expresión se deduce evidentemente la existencia de la frecuencia

umbral. Millikan (Phys.Rev. 7 (1916) 356) fue el primero en confirmar el valor de  $h$  mediante experimentos sobre el efecto fotoeléctrico.

Planck fue incapaz de aceptar la estructura discontinua de la luz. Retrocedió ante esta consecuencia postulando que la absorción debería ser continua. Eso fue desmentido por el efecto fotoeléctrico, ya que la emisión de electrones aparece y desaparece con la radiación sin intervalo de tiempo medible.

### **1.3. Calores específicos.**

Una de las primeras aplicaciones de la hipótesis de los cuantos fue el cálculo exacto del calor específico. Clásicamente el calor específico debería ser 6 cal/mol (Ley de Dulong y Petit). Esto fallaba en el diamante a todas las temperaturas y, en la mayoría de los sólidos, a temperaturas menores que la ambiente.

Para explicar esto Einstein (1905) supuso que la agitación térmica puede suministrar a la mayoría de los sólidos, excepto al diamante (enlaces muy fuertes), su cuanto de energía de vibración, ya que éste es muy pequeño. En cambio, a pequeñas temperaturas esto no es posible, y por eso el calor específico disminuye. Esta teoría fue desarrollada posteriormente por Debye, Born y Von Karman.

## **2. El modelo de Bohr y antecedentes.**

### **2.1. Espectroscopía y rayas espectrales.**

El papel fundamental de la espectroscopía con respecto a la estructura

del átomo se debe al hecho de que esta no puede ser revelada más que por los fenómenos observables a nuestra escala que son consecuencia de ella, por ejemplo, las rayas espectrales.

Los comienzos de la espectroscopía atómica se sitúan en 1859 con Bunsen y Kirchhoff, que estudian los primeros espectros de emisión: empezaron a clasificarse las rayas obtenidas en series cuya estructura presentaba grandes analogías en los distintos elementos, encontrándose que las frecuencias presentaban entre sí relaciones regulares. La más famosa de estas relaciones empíricas es la ley de Balmer (1885) para las líneas visibles del hidrógeno.

El estudio de las rayas espectrales llevó en 1908 al principio de conservación de Ritz: Para cada especie de átomos es posible encontrar una sucesión de números llamados términos espectrales tales que la frecuencia de cada raya sea igual a la diferencia de dos de estos términos

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

donde  $R$  es la constante de Rydberg.

La ley de Balmer se obtiene sustituyendo  $n$  por 2. En este mismo año, Paschen encontró tres rayas de la serie que lleva su nombre, que corresponden a  $n=3$ .

También se estudiaron las variaciones de frecuencia de las líneas espectrales bajo la acción de campos exteriores. Zeeman (1896) descubrió desdoblamientos en campos magnéticos que fueron interpretados por Lorentz. Pero el efecto Zeeman anómalo y el efecto Paschen-Back (1912) así como el efecto

Stark (1913) (desdoblamientos producidos por campos eléctricos) no pudieron ser correctamente explicados. Para eso era necesario la introducción del espín.

## **2.2. Modelos atómicos de Bohr, Sommerfeld y sus limitaciones.**

Bohr, discípulo de Rutherford en Manchester, trató de buscar una teoría que compatibilizara el modelo planetario con la estabilidad del átomo y la existencia de rayas espectrales. En 1.913 publica su teoría: "*Sobre la constitución de átomos y moléculas*" (Phyl. Mag. 26 (1.913) 1, 476 y 857). Bohr advirtió la perfecta concordancia entre su ley de frecuencias con la serie empíricamente obtenida por Balmer en 1.885 en  $n=2$ .

La serie correspondiente a  $n=1$ , cuyas rayas pertenecen al ultravioleta, fue observada por Lyman en 1.914. La serie correspondiente a  $n=3$  fue observada por Paschen y Brackett la serie correspondiente a  $n=4$ . La serie Pfund ( $n=5$ ) se sitúa en el infrarrojo lejano.

Además, Bohr extendió su teoría a los átomos hidrogenoides (helio ionizado) encontrándose que en la ley de frecuencias aparecía la constante de Rydberg multiplicada por cuatro. Franck y Hertz (Verh. Deut. Phys. Ges. 16 (1.914) 457 y 512), en una serie de experimentos dieron una confirmación directa de la existencia de niveles de energía estacionarios de acuerdo con la hipótesis de Bohr.

El año siguiente (1.916) Epstein, Schwarzschild y Sommerfeld estudiaron las reglas de cuantificación para sistemas cuasiperiódicos de variables separables (varias variables varían

periódicamente con períodos diferentes). Como aplicación de dichas se estudió el átomo hidrogenoide. Se encontró que además de cuantificarse la energía (obteniendo la fórmula de Bohr), se cuantifica el módulo del momento angular y su tercera componente.

El mismo Bohr era consciente de que su modelo era una alianza extraña entre teorías clásicas y métodos cuánticos introducidos "ad hoc" para restringir el número de órbitas clásicas posibles. Por otro lado, solo era capaz de calcular la frecuencia de las rayas emitidas pero no su intensidad ni su estado de polarización. Además, Kramers, al calcular el potencial de ionización del átomo de He obtuvo resultados en desacuerdo con la experiencia. También hay que consignar el fracaso de Sommerfeld en los átomos complejos.

## **3. Principio de correspondencia y teoría de la radiación.**

### **3.1. Dificultad de vincular la antigua teoría de los cuantos con la teoría de la radiación. Principio de correspondencia de Bohr**

Bohr, desde 1914, en una memoria titulada "*El efecto de los campos eléctricos y magnéticos en las líneas espectrales*" (Phil. Mag. 27 (1914) 506), se esfuerza por establecer una cierta conexión entre su dinámica y la teoría electromagnética clásica debido a:

- a) Con su teoría, deroga el electromagnetismo clásico, donde a toda carga acelerada le corresponde una radiación.

b) Con su teoría solo es capaz de calcular la frecuencia de las rayas espectrales emitidas, cuando la teoría electromagnética clásica, dada la estructura y el movimiento de un conjunto de cargas eléctricas, permite calcular las intensidades y polarizaciones de las radiaciones emitidas.

Esta conexión se explicita en el principio de correspondencia que formula en un artículo de 1918 titulado: “*La teoría de las líneas espectrales*”. En él dice: “*Como la teoría electromagnética se verifica siempre muy aproximadamente en el dominio de los fenómenos macroscópicos, que, desde el punto de vista cuántico, son aquellos en que interviene un número de cuantos elevado, eso implica que las previsiones de la teoría cuántica deben tender asintóticamente hacia las de la teoría clásica en el dominio de los grandes números cuánticos*”.

### 3.2. La teoría cuántica de la radiación de Einstein.

Título de un artículo de Einstein, publicado en Mitt. Phys. Ges. (Zurich) 18 (1916) 47, que, junto al principio de correspondencia, fue la base de todos los trabajos posteriores sobre radiación.

Einstein se percata que en la teoría de Bohr la interacción entre la materia y la radiación queda un tanto ambigua, se formula las siguientes preguntas cruciales: ¿por qué no emite el átomo en su estado fundamental?, ¿qué sucede cuando pasa de un estado a otro? y, ¿qué leyes determinan las probabilidades de las transiciones?

Para responderlas, Einstein, en primer lugar, acepta la existencia de estados discretos de energía. Después, basándose en la estadística clásica de Boltzmann, calcula la probabilidad de que las moléculas estén en un estado de energía  $E_n$ .

$$W_n = p_n \cdot e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

Cuando incide una radiación sobre la molécula, ésta puede absorberla y pasar al estado E. ¿Cuál es la probabilidad que tal suceso ocurra en un diferencial de tiempo dt? Einstein formula la siguiente hipótesis

$$dW = B_n^m \rho dt$$

donde  $B_n^m$  es la constante que caracteriza la transición de “n” a “m” y  $\rho$  es la densidad de radiación.

Por otra parte, en presencia de la radiación, una molécula en  $E_m$  puede emitir y pasar a  $E_n$  tal que  $E_m > E_n$ . La probabilidad de esta transición será

$$dW = (A_m^n + B_m^n \rho) dt$$

donde  $B_m^n$  es una constante que caracteriza la emisión inducida y  $A_m^n$ , la emisión espontánea.

Si la radiación está en equilibrio con la distribución de moléculas en la temperatura T, las probabilidades deben ser iguales, y obtenemos la ley de distribución de Planck.

Veinticinco años después de la teoría de Einstein, N. Bassov, A. Prokhorov y Ch. Townes realizaron investigaciones sobre la amplificación de microondas, que llevó en 1945 a la construcción del primer máser operativo. Recibieron por eso el premio Nobel de 1964. En 1957 Gordon Gould y Ch. Townes plantearon

una amplificación análoga de la luz, lo cual condujo en 1960 al primer láser de rubí satisfactorio.

### **3.3. Los trabajos de Copenhague sobre teoría de la radiación.**

Slater en una carta al director de la revista *Nature* titulada “Radiación y átomo” (Nat. 113 (1924) 307), intentó conciliar la teoría de los cuantos de luz con la electrodinámica, creando un campo que guíe los cuantos discretos, que deben moverse, por ejemplo, en la dirección del vector de Poynting de este campo. Realiza eso mediante el concepto de “campo virtual de radiación” emitido por los “osciladores virtuales de Lademburg”.

En eso consistió la primera parte del artículo de Bohr, Slater y Kramers titulado: “Teoría cuántica de la radiación” (Phyl. Mag. 47 (1924) 785). Otra (de la cual se exculpó Slater repetidamente) fue: “La conservación estadística de la energía (suponemos que la energía no se conserva en cada proceso individual, pero sí en un conjunto de procesos)”. Utilizaron esta idea para intentar explicar el efecto Compton y, posteriormente también se intentó explicar con ella la desintegración  $\beta$ . En ambos casos esta hipótesis no fue aceptada.

### **3.4. Efecto Compton.**

Obtuvo que al incidir un haz de rayos X con una frecuencia definida sobre un blanco de grafito, una parte de ella era difundida en todas direcciones. Según la teoría clásica, la radiación difundida debe tener la misma frecuencia que la incidente. No obstante, al medir la

intensidad de los rayos X en diferentes direcciones, en función de la longitud de onda, se ve que los dispersados tienen dos longitudes de onda, una de ellas idéntica a la incidente y otra mayor en un  $\Delta\lambda$  (desplazamiento Compton). Además, comprobó que esa longitud de onda era independiente de la sustancia utilizada. Publicó sus resultados en Phil. Mag. 41 (1921) 749 y Phys. Rev. 18 (1921) 96. Intentó una explicación ondulatoria de este fenómeno, porque se oponía a la hipótesis heurística de Einstein, pero fracasó.

Compton (Phys. Rev. 21 (1923) 483 y 715) y Bothe y Geiger (1924), aplicando una interpretación corpuscular al efecto Compton, demostraron que la energía y el momento lineal se tenían que conservar en cada proceso individual de colisión del fotón con el electrón, enterrando así la teoría de Bohr y Kramers sobre la conservación estadística. Eso supuso el triunfo definitivo de los principios de conservación de la energía  $E$  y la cantidad de movimiento  $p$  y del concepto de fotón. Se obtuvo

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta)$$

## **4. Años decisivos (1923-1927)**

### **4.1. Comienzos de la mecánica cuántica en Gotinga.**

Hasta 1920, la enseñanza y desarrollo de la teoría de Bohr estuvo restringida a dos universidades: Copenhague (Bohr) y Munich (Sommerfeld). En 1920 se contrata a Born y a Franck en

Gotinga, que la introducen allí. La fecha decisiva es el verano de 1922 cuando se organiza el llamado “festival Born” en Gotinga. La audiencia fue muy numerosa y participaron Born, Franck, Sommerfeld y dos discípulos de éste: Heisenberg y Pauli.

En las discusiones del festival se plantearon dos problemas fundamentales:

- a) ¿Es posible determinar en general y correctamente las energías de los estados discretos al aplicar las condiciones de Bohr-Sommerfeld a los movimientos de los electrones en los átomos?
- b) ¿Hasta qué punto se adapta el modelo de Bohr a explicar las propiedades químicas y ópticas del sistema periódico?

En el semestre de invierno (1922-23) Sommerfeld va a América. Born organiza un seminario en Gotinga al que asisten Heisenberg y Pauli. El seminario trató sobre mecánica clásica: teoría de perturbaciones y problema de los tres cuerpos, ya que la mecánica clásica presentaba rasgos que reaparecían en la mecánica cuántica.

#### **4.2. Orígenes de la mecánica ondulatoria.**

Nace en 1923, con los trabajos de Louis de Broglie en (Comtes Rendues, 177 (1923) 507, 548 y 630). La primera exposición sistemática de esta mecánica es su tesis doctoral “*Investigaciones sobre la teoría de los cuantos*” (1924). Según sus propias declaraciones, para establecer la mecánica ondulatoria se basó en:

- a) Argumentos heurísticos: para la descripción completa de la radiación debían ser usadas alternativamente las imágenes ondulatoria y corpuscular. ¿Por qué no encontrar una dualidad análoga en todas las partes donde se manifieste la presencia de  $h$ , por ejemplo, en los electrones? Por otro lado, en las condiciones de cuantificación aparecen números enteros, que se encuentran en todas las ramas en que se consideran ondas.
- b) Argumentos basados en las analogías entre la mecánica analítica y la teoría ondulatoria: la teoría de Jacobi permite agrupar las trayectorias posibles de un punto material de manera que a las trayectorias de una misma familia se asocia una familia de superficies normales que se determina a partir de la ecuación de Jacobi. Eso muestra un paralelismo entre los rayos y las superficies de onda de las teorías ondulatorias y las trayectorias y sus superficies de onda de la teoría de Jacobi.

De eso se deduce que el principio de mínima acción de la mecánica analítica

$$\delta \int_a^b p(\vec{r}, E) ds = 0$$

resulta ser la traducción del principio del tiempo mínimo de Fermat

$$\delta \int_a^b \frac{ds}{\lambda(\vec{r}, \nu)} = 0$$

en consecuencia,  $p=A/\lambda$ , siendo  $A$  una constante desconocida

El programa era asociar a todo corpúsculo la propagación de cierta onda

de manera que las reglas generales dieran cuando se le aplicaran al fotón las relaciones que Einstein había obtenido en su teoría de la relatividad especial. Por lo tanto, como para el fotón

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

de ello se deduce que  $A = h$  tanto para fotones como para partículas materiales.

La consecuencia que se deriva es que se hace corresponder a la partícula la propagación de un grupo de ondas la frecuencia central de las cuales sea igual a la energía de la partícula dividida por  $h$ . Por lo tanto la velocidad de grupo del tren de ondas será igual a la de la partícula y como, por otra parte, también es igual a la velocidad de transporte de la energía, eso implica que la partícula permanecerá ligada al grupo de ondas en su movimiento.

### 4.3. Difracción de electrones.

Pocos años después Davisson y Germer (Phys.Rev. 30 (1927) 705) confirmaron la predicción de Louis de Broglie bombardeando con electrones de 54 eV un cristal de níquel. Obtuvieron una figura de difracción de Von Laue (manchas) correspondiente a una longitud de onda de 1,65 Å (teóricamente se obtenía 1,67 Å, así pues, la precisión era muy notable).

Posteriormente G. P. Thompson (hijo de J. J. Thompson, el descubridor del electrón) y Reid (Proc. Roy. Society 117 (1928) 600) estudiaron la difracción haciendo pasar un haz monocinético de electrones sobre polvo de cristal; el resultado se traduce en la aparición de

anillos de difracción de Debye-Scherrer, cuyo diámetro es función de la distancia reticular de los cristales y de la longitud de onda del haz incidente.

Esto dio origen en la década de 1930 a los primeros microscopios electrónicos en que las lentes de vidrio fueron sustituidas por lentes magnéticas. También se utilizan electrones, neutrones, etc., para determinar la estructura de los vidrios o incluso de virus y de moléculas importantes biológicamente, con los que es posible formar un vidrio. En la actualidad, basados en la física cuántica se han desarrollado los microscopios de barrido de efecto túnel, que permiten ver (e incluso manipular) los átomos de una superficie.

## 4.4. Mecánica cuántica (1924-26).

### 4.4.1. Sobre la mecánica cuántica.

Este es el título de un artículo de Born de 1924. La idea es tratar la interacción entre sistemas mecánicos usando los mismos métodos que utilizó Kramers para estudiar la interacción entre el campo de radiación y el átomo.

Asume que un átomo en un estado estacionario “n” se puede reemplazar por un conjunto de osciladores virtuales de frecuencia

$$\nu_{nm} = \frac{1}{h}(E_n - E_m)$$

A cada resonador virtual le corresponde, en el sentido del principio de correspondencia, un término de la serie de Fourier del movimiento en el estado “n” calculado clásicamente. Esta idea fue utilizada por Heisenberg, como veremos a continuación y, de ahí, su importancia.

#### 4.4.2. Las ideas directrices de Heisenberg.

El semestre de invierno de 1924-25, Heisenberg va a Copenhague y trabaja con Kramers en la dispersión. Extendieron la fórmula de este último a la dispersión incoherente de luz por átomos, es decir, a los casos en que la frecuencia de la luz dispersada viene dada por

$$\nu' = \nu + \nu_{nm}$$

donde  $\nu_{nm}$  es una de las frecuencias características del átomo.

En abril de 1925 Heisenberg vuelve a Gotinga, donde trata de conjeturar las intensidades de las líneas del hidrógeno, pero fracasa. Llegó a la conclusión de que las dificultades que aparecen a la hora de interpretar las mencionadas líneas mediante las reglas de cuantización no eran debidas al hecho de partir de la mecánica clásica, sino más bien a la ruptura de la cinemática que subyace a esa mecánica. Por eso Heisenberg asumió que la ecuación del movimiento del electrón puede continuar siendo válida, pero que la interpretación cinemática de la cantidad "x" como una posición dependiendo del tiempo debería ser rechazada.

En un movimiento periódico clásico  $x(t)$  puede extenderse en serie de Fourier. Cuánticamente los coeficientes de la serie y de las frecuencias dependen de un número cuántico:

$$x(t) = \sum_n a_n e^{i\omega_n t}$$

Para Heisenberg el mayor problema consistía en calcular la intensidad de la radiación emitida en una transición, por lo tanto reemplazó en los coeficien-

tes y en las frecuencias las "n" por (n; n- $\alpha$ ) correspondientes a la transición de "n" a "n- $\alpha$ ". Además sabía que esa intensidad era proporcional a la probabilidad de emisión de Einstein. Asumió que esa probabilidad era:

$$A_n^{n-\alpha} \alpha |a(n; n-\alpha)|^2$$

justificando tal hipótesis sobre la base que tanto las intensidades como  $|a(n; n-\alpha)|^2$  eran observables en contraste con las funciones  $x(t)$ .

Extendiendo su razonamiento obtiene una reformulación de la ley de combinación de frecuencias de Ritz, que le lleva a una ley de multiplicación para las  $x(t)$  a través de sus desarrollos en serie de Fourier

$$x(t)y(t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} c(n; n-\alpha) e^{-i\alpha\omega(n; n-\alpha)t}$$

donde

$$c(n; n-\alpha) = \sum_{\beta} A(n; n-\beta) B(n-\beta; n-\alpha)$$

este producto presenta la nueva e insólita dificultad que es no conmutativo.

Heisenberg aplicó su método a un problema particular, el oscilador inarmónico que le lleva a determinar las amplitudes de dispersión excepto una constante, que solo determina en verano cuando, afectado por las fiebres del heno fue a la isla de Helgoland. Al volver de Helgoland entregó los resultados de su trabajo a Born, que los hizo publicar. Aparecieron en los (Zeits. Phys. 33 (1925) 879).

Heisenberg va a Leyden invitado por Ehrenfest. Entretanto Born y Jordan profundizaron las consecuencias matemáticas de su trabajo hacia finales de septiembre, percatándose que "la herramienta" introducida por Heisenberg se

compone de matrices, las cuales tienen una ley de multiplicación no conmutativa. También encontraron la relación  $qp - pq = i\hbar$ .

#### 4.4.3. Contribución de Dirac.

En septiembre de 1925, Heisenberg pasa de Leyden a Cambridge donde Fowler le había invitado a dar unas conferencias. Heisenberg le dio las pruebas de imprenta de su artículo, que Fowler pasó a Dirac. Este último, convencido de que la base del problema estaba en el método de Hamilton, las aparta una semana, después de la cual vuelve a reflexionar sobre ellas, y encuentra la conexión entre la interpretación teórica de las variables cinemáticas de Heisenberg con la teoría de Hamilton. El fundamento de esta conexión fue la equivalencia del paréntesis Poisson con la regla de multiplicación no conmutativa de Heisenberg.

$$\xi\eta - \eta\xi = i\hbar[\xi, \eta]$$

Dirac publica sus resultados en octubre de 1925 bajo el título de “*ecuaciones fundamentales de la mecánica cuántica*”. En este artículo resume las ideas de Heisenberg y las pone más elegantes, anticipa resultados del trabajo de los tres hombres, establece las ecuaciones canónicas del movimiento cuántico

$$i\hbar \frac{d\xi}{dt} = [\xi, H]$$

e introduce los operadores de creación y destrucción.

#### 4.4.4. El trabajo de los tres hombres.

Al volver Heisenberg a Gotinga inicia junto a Born y Jordan el traba-

jo que dio una consistencia lógica a la mecánica de matrices y que “*contenía todo el diluvio de conocimiento formal*” (Pauli): valores propios, vectores propios, transformaciones canónicas, ejes principales de transformación, formas cuadráticas de Hilbert de un número infinito de variables, relaciones generales de conmutación y aplicaciones físicas, incluyendo la cuantización del campo electromagnético y el cálculo de las fluctuaciones en ese campo.

En la realización de este trabajo hubo pequeñas discrepancias, ya que a Heisenberg le interesaba hacer énfasis sobre todo en el contenido físico de la teoría (en especial la ausencia de órbitas electrónicas), en tanto que Born consideraba la transformación de ejes como centro de la teoría.

Otra dificultad fue que Born se fue a América a finales de octubre (donde con Norbert Wiener escribió una nueva formulación matemática de la teoría cuántica que utilizaba el concepto de operador lineal) y Jordan y Heisenberg tuvieron que publicar su trabajo después de su marcha en los *Zeits. Phys.* 35 (1926) 557.

En aquel tiempo mantenían correspondencia regular con Pauli, que residía en Hamburgo, quien antes de que se acabara el trabajo de los tres hombres demostró que la nueva teoría proporcionaba el espectro correcto del átomo de hidrógeno. También consiguió tratar con total exactitud el caso más complicado del átomo de hidrógeno en campos eléctricos y magnéticos transversales. Este mismo problema fue tratado por Dirac en un artículo de 1926 titulado:

“La mecánica cuántica e investigación preliminar del átomo de hidrógeno”.

Después de concluir el trabajo de Heisenberg escribió a Pauli una carta manifestándole su preocupación por el hecho de que, si bien el artículo contenía todo el aparato matemático, era incapaz, por ejemplo, de describir la trayectoria del electrón en una cámara de niebla.

#### 4.5. La mecánica ondulatoria de Schrödinger

Einstein recaló la importancia de los trabajos de Louis de Broglie, y Schrödinger en Zurich partiendo de la idea fundamental de éste (“la *óptica geométrica es a la óptica ondulatoria como la mecánica clásica debe ser a la mecánica ondulatoria*”), escribió sus famosos artículos base de la mecánica ondulatoria (Ann. Phys. 79 (1926) 109, 361, 437 y 489).

En el primero de ellos Schrödinger se propone construir un paquete de ondas muy restringido en todas dimensiones, susceptible de reemplazar al punto representativo de un sistema mecánico conservativo cuya velocidad coincida con la velocidad de grupo del paquete.

Para desarrollar este carácter ondulatorio, toma como punto de partida la ecuación

$$\left[ -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r})$$

que se conoce con el nombre de “ecuación de Schrödinger para estados estacionarios”.

Para demostrar la elegancia y el poder de su nuevo esquema resolvió,

en otro artículo, el problema del átomo de hidrógeno, el del oscilador armónico y los efectos de Stark y Zeeman. Para el átomo de hidrógeno encontró que no existen soluciones monocromáticas que satisfagan las condiciones de contorno más que para ciertas energías del electrón, que son los valores propios de la ecuación y coinciden con los resultados de Bohr; aunque la degeneración correspondiente a un nivel energético no coincidió con la del modelo de Sommerfeld ya que los valores posibles para el momento angular no son  $n_{\psi} = 1, \dots, n$  sino  $l = 0, \dots, n-1$  y por lo tanto la degeneración no es  $n(n+1)$  sino  $\Sigma(2l+1) = n^2$ .

En cuanto al oscilador lineal obtuvo que la energía es igual a

$$E = \left( n + \frac{1}{2} \right) h\nu$$

como parecían indicar los fenómenos físicos en que intervenía la cuantificación del oscilador (por ejemplo, los espectros de bandas de las moléculas biatómicas). En la antigua teoría de los cuantos, el valor de la energía era

$$E = nh\nu$$

Con respecto a los efectos Stark y Zeeman introdujo para estudiarlos un método de perturbaciones análogo a las de la mecánica celeste ya que  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son muy débiles en relación a los campos de los sistemas atómicos. Hay que, por lo tanto, calcular la modificación muy débil que el campo perturbador imprime a los valores cuantificados. No pudo explicar el efecto Zeeman anómalo por no introducir el espín  $\vec{S}$  del electrón.

En otro trabajo, ataca el problema de generalizar su ecuación para estados

estacionarios ya que ésta no es aplicable para estados que dependan del tiempo. Obtiene:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] \Psi$$

También se preocupó del sentido físico de  $\Psi$ : consideró que el electrón estaba difundido en el átomo y que su carga estaba repartida de forma continua, de manera que

$$e\Psi^*(q,t)\Psi(q,t)$$

es la densidad de carga. Todo sucede como si esa distribución que varía con el tiempo irradiara según las leyes clásicas.

Sobre este punto tuvo una serie de discusiones en Copenhague (donde fue invitado por Bohr) que se resolvieron con el abandono de esta concepción, ya que el proceso de emisión por transmisiones cuánticas es demasiado discontinuo para que pueda representarse por la emisión clásica de una distribución.

#### 4.6. Desarrollos de la mecánica cuántica.

Al finalizar los trabajos anteriormente mencionados, el aparato matemático de la teoría estaba prácticamente formulado, pero no así su interpretación física (que es fruto de los trabajos que vamos a reseñar a continuación) ni su coherencia interna (axiomatización).

##### 4.6.1. Identidad de la mecánica cuántica y de la mecánica ondulatoria.

Después de la sorpresa que causaran los trabajos de Schrödinger en Gotinga,

el 18 de marzo de 1926 apareció en los *Annalen der Physics* su prueba de la equivalencia entre ambos formalismos. La idea directriz de Schrödinger: “*debe ser posible construir con las ayudas de las funciones de onda de la mecánica ondulatoria magnitudes que tengan las propiedades de las matrices de la mecánica cuántica*”.

Por eso acopló las funciones propias dos a dos: una función propia con ella misma o con otra diferente. Las primeras van unidas en un estado estacionario único y las segundas a la transición entre dos estados estacionarios diferentes.

Ahora bien, como según Heisenberg a cada magnitud le corresponde una matriz diferente, Schrödinger asoció a cada par de funciones una magnitud formada a partir de un cierto operador actuando sobre una de las funciones de manera que:

$$\langle \Psi_m | p | \Psi_n \rangle = \int \Psi_m^* p \Psi_n dv$$

Las matrices formadas por este procedimiento satisfacen las reglas de adición y multiplicación y obedecen las ecuaciones canónicas de la mecánica cuántica.

##### 4.6.2. Interpretación probabilística de la función de ondas.

En Gotinga se aprovechó el verano para hacerse con los métodos de Schrödinger, por lo que lo más sencillo era, según Heisenberg, “*escribir un trabajo sobre un problema físico concreto*”. Fruto de eso fueron los artículos de Heisenberg sobre el átomo de helio, el de Jordan sobre teoría general de las

transformaciones y el de Born sobre procesos de colisión. Este último artículo publicado en los *Zeits. Phys.* 38 (1926) 803, jugó un papel fundamental ya que además de iniciar el tratamiento de los problemas de choque en la mecánica cuántica introdujo la interpretación probabilística de la función de ondas de Schrödinger.

Born partió del hecho de que así como en el espíritu de Heisenberg toda descripción exacta de los fenómenos en el espacio y en el tiempo aparece imposible, en el espíritu de Schrödinger las ondas poseían una cierta realidad física. Por su parte, propone una nueva interpretación procedente de una observación de Einstein sobre las relaciones entre fotones y campos de ondas. Einstein decía que las ondas no sirven más que para mostrar el camino de las partículas y hablaba en este sentido de un campo “*virtual*”. Este campo determina la probabilidad para que un fotón portador de energía y momento, tome un camino determinado, pero que no posee el mismo ninguna energía ni ninguna cantidad de movimiento. Para Born, las ondas de la mecánica cuántica se limitarían de forma análoga al papel de “*pilotos*”. Esta onda se propagará según la ecuación de Schrödinger pero no determina más que las probabilidades respectivas de las diferentes trayectorias posibles.

Born resume esto en la siguiente fórmula: “*el movimiento de las partículas sigue las leyes de la probabilidad, pero la probabilidad se propaga según el principio de causalidad*”.

Como toda función de onda se deja desarrollar en serie

$$\Psi(q) = \sum_n c_n \Psi_n(q)$$

la probabilidad de encontrar la partícula en una región  $dq$  vendrá dada por

$$\int |\Psi(q)|^2 dq = \sum_n |c_n|^2$$

#### 4.6.3 Las relaciones de incertidumbre.

El problema de la trayectoria del electrón planteado por Heisenberg fue discutido entre los meses de octubre de 1926 y febrero de 1927, casi sin interrupción. Por fin Heisenberg encontró una explicación, publicando su famosa memoria (*Zeits. Phys.* 43 (1927)).

En ella Heisenberg estima que solo se llega a la comprensión intuitiva de una teoría física, cuando se puede, en todos los casos simples, imaginar cualitativamente sus consecuencias y cuando se ha reconocido, con el uso, que esta teoría no presenta contradicciones. “*La significación intuitiva de la teoría cuántica está aún llena de contradicciones internas*” donde se oponen las nociones extraídas del continuo y del discontinuo, de las ondas y de las partículas. Parece que con la ayuda de los conceptos mecánicos y cinemáticos habituales no se pueden evitar estas contradicciones.

Además, la necesidad de una revisión de los mencionados conceptos cinemáticos y dinámicos aparece como una consecuencia inmediata de las ecuaciones fundamentales de la mecánica cuántica. En efecto, cuando tenemos una masa determinada “*m*”, clásicamente encontramos una significación inmediata a la posición y velocidad de

esa masa. Pero en mecánica cuántica, debemos tener entre la posición y la cantidad de movimiento la relación

$$qp-pq=i\hbar$$

¿Es posible resolver esas contradicciones? Si se busca definir qué debe entenderse por posición de un objeto se debe imaginar una experiencia que permita medir esa magnitud. Por ejemplo, se ilumina un electrón y se observa en el microscopio. La precisión de esta medida está determinada por la longitud de onda empleada. Si se utilizan rayos  $\gamma$  debemos poder obtener toda la precisión deseada. Pero aparece una dificultad: el efecto Compton. En el momento que se determina la posición, es decir, en el momento en que el fotón ha chocado con el electrón, se registra una discontinuidad en su cantidad de movimiento: esta alteración es tanto más grande como menor es la longitud de onda utilizada. Cuanto más se conoce la posición, menos se conoce la cantidad de movimiento y a la inversa. Eso encuentra su expresión matemática en la relación de incertidumbre:

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar$$

Llegamos al concepto de trayectoria: *“la expresión corrientemente empleada de trayectoria del electrón en el átomo de hidrógeno aparece vacía de sentido. Para medir la trayectoria habría que iluminar el átomo con una  $\lambda < 10^{-8}$  cm. Pero un solo cuanto de esa luz sería suficiente para expulsar al electrón fuera de su trayectoria... Se puede seguir esta experiencia sobre un gran número de átomos en el estado “s”, se obtendrá así*

*un reparto de probabilidades de la posición del electrón. Desde Born esta probabilidad es  $\Psi \cdot \Psi^*$  si  $\Psi$  es la función de onda de Schrödinger en el estado s”.*

Por otro lado, *“la palabra velocidad puede ser definida por una experiencia cuando se trata de movimientos en ausencia de fuerzas. Se puede, por ejemplo, iluminar un objeto con luz roja y definir su velocidad con ayuda del efecto Doppler-Fizeau. La precisión sobre la velocidad será tanto mejor como mayor sea la  $\lambda$  de la luz empleada. Correlativamente la posición del objeto será tanto más imprecisa conforme a la relación de incertidumbre”.*

En el paso siguiente discute en su artículo la medida de la energía, encontrando que se cumple

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

Y concluye, *“todos los conceptos utilizados en teoría clásica para la descripción de un sistema mecánico se dejan aún definir de forma análoga en el dominio atómico. Pero las experiencias que utilizan estas definiciones comportan una indeterminación tan pronto como queramos deducir los valores de dos magnitudes conjugadas. El grado de esta indeterminación está dado por la relación*

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar$$

#### 4.6.4. El teorema de Ehrenfest.

Éste se preguntó qué camino es posible partiendo de la mecánica cuántica hacia la ley de Newton del movimiento. Publicó sus resultados en el Zeits. Phys. 45 (1927) 455. Encontró que, *“en*

todos los casos en que la dimensión del paquete de ondas de probabilidad sea suficientemente pequeña con referencia las distancias macroscópicas, la derivada de la cantidad de movimiento del paquete de ondas en el sentido de la mecánica de Newton es igual al valor de la fuerza en el punto donde se encuentra localizado este paquete". Expresado matemáticamente

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle q \rangle = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial q} \right\rangle$$

donde

$$\langle q \rangle = \int \psi^* q \psi dq \quad \text{y} \quad \left\langle \frac{\partial V}{\partial q} \right\rangle = \int \psi^* \left( \frac{\partial V}{\partial q} \right) \psi dq$$

La extensión en el transcurrir del tiempo del paquete de ondas es una cuestión difícil estudiada posteriormente por Kennard y Darwin.

#### 4.6.5. El principio de complementariedad.

En 1928, poco después del trabajo de Heisenberg sobre las relaciones de incertidumbre, Bohr escribió una memoria en que intentó superar la contradicción entre las ondas y las partículas que existía en el seno de la mecánica cuántica.

Partiendo de que la descripción de una entidad como el electrón debe hacerse con la ayuda de la imagen corpuscular o de la imagen ondulatoria, dijo que las relaciones de incertidumbre no permitían a las dos imágenes empleadas entrar en conflicto directo. En efecto, cuando el electrón tiene una longitud de onda bastante bien definida como para poder interferir, no está localizado y no responde a la imagen

corpuscular. A la inversa, si está bien localizado, las propiedades interferenciales desaparecen. En resumen, las propiedades ondulatorias y corpusculares no existen nunca al mismo tiempo.

#### 4.6.6. Los principios de la mecánica cuántica.

Bajo este título publicó Dirac su libro en 1929 (Dirac, 1967). En él la mecánica cuántica alcanza una formulación que, prácticamente sin modificaciones esenciales, ha continuado enseñándose hasta la actualidad. Parte de la idea de que la formulación de las leyes exige el uso de las matemáticas de las transformaciones. Los elementos importantes del mundo físico aparecen como las invariantes de estas transformaciones (o, más en general, cantidades que se transforman de manera sencilla).

Con respecto al formalismo matemático, según sus propias palabras, "el autor debe decidirse desde el principio entre dos métodos. Uno es el método simbólico, que considera directamente y de forma abstracta las cantidades de importancia fundamental, y el otro se basa en el uso de coordenadas o representaciones y trata con conjuntos de números que corresponden a estas cantidades. Por regla general siempre se ha utilizado el segundo que se conoce con los nombres de mecánica ondulatoria y mecánica de las matrices, según a cuál de los elementos físicos, estados o variables dinámicas del sistema se le conceda mayor importancia".

Dirac opta decididamente por el método simbólico: sus conceptos fundamentales son estado, observación y

observable. El estado, es muy delicado de definir, decir que un sistema está en un estado dado, después de haber sido convenientemente preparado, es dar todos los elementos relativos a su estructura, su posición en el espacio y en el tiempo y sus movimientos internos. El estado permanece ya que permanentemente excepto perturbación (la noción de perturbación es ella misma relativa, si se puede incorporar la causa perturbadora al sistema). Pero se admite que la perturbación que consiste en preparar un sistema para conducirlo a un estado dado tiene un carácter absoluto, así como la perturbación que entraña en general toda observación hecha sobre un sistema en un instante dado. Se admite también que un estado cualquiera debe poder ser considerado como el resultado de la superposición de dos o más estados diferentes (principio de superposición).

Llegamos así a la noción de observación. En general, toda medida efectuada sobre un sistema previamente preparado de una manera conveniente modifica el estado inicial del sistema. El resultado de una observación no está en general completamente determinado y la repetición de una observación a partir de condiciones iniciales idénticas no producen un único resultado. Se puede únicamente, con ayuda de un gran número de experiencias idénticas, deducir la probabilidad de un resultado dado. Esta indeterminación relativa está ligada al principio de superposición de estados.

Hay que especificar, en general, el intervalo de tiempo que transcurre entre la preparación de un sistema y

la ejecución de la medida (porque un mismo estado es relativo al espacio y al tiempo y no excluye una evolución determinada la cual es susceptible de modificar el resultado de una medida). A veces, para ciertos estados llamados por definición estacionarios este intervalo no tiene incidencia.

Hay un caso donde la observación no perturba al sistema, es este donde existe, en lugar de una probabilidad, una certeza de obtener un resultado dado con la ayuda de esta observación. Dirac admite que es así en el momento de la repetición inmediata (detrás de la perturbación producida por una primera medida) de una observación que ha dado un primer resultado: el segundo es entonces idéntico al primero.

Dos observaciones se dicen compatibles cuando la probabilidad de obtener un resultado dado por la segunda no es modificada por la perturbación debida a la primera. Esta propiedad es recíproca. El caso más importante es este donde dos o más observaciones compatibles son efectuadas simultáneamente. Si se efectúan así simultáneamente, el número máximo de observaciones independientes y compatibles que comporta el sistema obtenemos que el estado final se encuentra definido por esta observación máxima independientemente del estado inicial.

Después de estas definiciones, Dirac introduce el aparato matemático en el que, análogamente a lo que le sucedió a Heisenberg, ha hecho uso de conceptos ya conocidos en matemáticas sin saberlo. En su caso se trata, como ya notaron los matemáticos Von Newman y Weil,

que había hecho uso de los espacios de Hilbert.

#### 4.6.7. *La teoría de la cuantificación en la nueva mecánica.*

Este es el título de un libro de De Broglie (1965), cuya primera edición es de 1932, en el que trata de llegar a la misma teoría general de Dirac partiendo del punto de vista más intuitivo de la mecánica ondulatoria.

Por eso establece los siguientes postulados:

- 1) A cada magnitud le corresponde un operador lineal y hermítico, los valores propios del cual son reales, y cuyas funciones propias forman un sistema completo de funciones base.
- 2) Principio de cuantificación: la medida exacta de una magnitud mecánica no puede suministrar como valor de esa magnitud más que uno de los valores propios del operador correspondiente. (Este postulado nos fija los valores posibles de una magnitud).
- 3) Principio de descomposición espectral: las probabilidades de los diferentes valores posibles de una magnitud mecánica de una partícula de la que se conoce su función de ondas, son proporcionales a los cuadrados de los módulos de las amplitudes correspondientes en la descomposición espectral de la función de onda según las funciones propias de la magnitud considerada.

## 5. *Desarrollos posteriores de la mecánica cuántica*

### 5.1. *El espín. Sistemas de partículas idénticas. Principio de exclusión de Pauli.*

La mecánica cuántica no está completa si no se tienen en cuenta el *espín* y el postulado de simetrización (ambos tuvieron que ser introducidos “*ad hoc*”), porque quedaban una serie de hechos de orden espectroscópico y magnético que no habían podido ser explicados. Entre ellos las estructuras finas de los átomos complejos, el efecto Zeeman anómalo, el efecto Stern y Gerlach y las anomalías giromagnéticas.

Estos hechos solo pudieron ser explicados con la introducción del *espín*. Uhlenbeck y Goudsmit introdujeron en 1925 la idea del *espín* según sus palabras “*considerando al electrón como una pequeña esfera que pudiese girar...*” después de estudiar un artículo del mismo año de Pauli en el que este formulaba su principio de exclusión y en el que, por primera vez, se le asignaban cuatro números cuánticos al electrón.

Una vez introducido el *espín*, para completar la mecánica cuántica se debe tener en cuenta que así como clásicamente dos partículas de la misma naturaleza eran idénticas, en mecánica cuántica hay que renunciar completamente a la posibilidad de distinguir dos partículas de la misma naturaleza de un mismo sistema y ver como identificar dos estados de un sistema que no difieren el uno del otro más que por la permutación de estas dos partículas.

Esta permutabilidad tiene consecuencias muy importantes. Así, si permutando las coordenadas de dos partículas de un sistema, la función de ondas no cambia su valor, decimos que es simétrica en relación a estas partículas. Por otra parte, si permutándolas cambia de signo, decimos que es antisimétrica. Eso nos lleva a que dado un sistema físico de partículas idénticas, las funciones de onda que describen sus estados deben ser todas simétricas o todas antisimétricas.

### **5.2. Estadísticas cuánticas.**

Los métodos de la mecánica estadística clásica de Boltzman consisten en enumerar las reparticiones posibles de los átomos del gas entre los estados de movimiento para una energía dada y buscar la repartición global más probable. Para desarrollar completamente la formulación cuántica de la estadística clásica es necesario calcular el número de posibles reparticiones de los átomos (u otros elementos del sistema) entre los diversos estados cuánticamente posibles.

Por eso hay que tener en cuenta:

- 1) La indistinguibilidad de las partículas que nos obliga a considerar como idénticas dos reparticiones que difieran solamente por la permutación de estas dos partículas.
- 2) El hecho de que nuestros elementos obedezcan o no al principio de exclusión de Pauli.

Si lo obedecen, es decir, si sus funciones de onda son necesariamente antisimétricas, habrá como mucho una partícula en cada estado. Si no lo obedecen,

las funciones de onda son simétricas y nada limita el número de elementos que se encuentran en un estado posible.

En el primer caso, se llega a la estadística de Fermi-Dirac (formulada por Fermi en 1926 al generalizar el principio de Pauli). En el segundo, a la estadística de Bose-Einstein (formulada por el primero en 1924 en el marco de la antigua teoría de los cuantos). Las dos nuevas estadísticas se confunden asintóticamente con la clásica si se hace tender el valor de  $h$  hacia cero.

Como los fotones no obedecen el principio de Pauli, un gas de fotones sigue la estadística de Bose-Einstein. La radiación en equilibrio presente en un recinto isoterma es asimilable a un gas de fotones, con la diferencia de que el número de fotones no es constante (procesos de emisión y de absorción) y por lo tanto se le puede aplicar a esta radiación la estadística de Bose: se vuelve a encontrar la ley de distribución de Planck, que como está muy bien comprobada, da una notable confirmación de la estadística de Bose.

### **5.3. Las ecuaciones de Pauli y Dirac.**

El primer intento de formular una ecuación de ondas que fuera consistente con el espín del electrón fue la de Pauli. Observó que el espín de un cuerpo en rotación podría ser representado por una matriz y, a continuación, introdujo las matrices de espín en la ecuación de ondas clásica. Ahora bien, estas ecuaciones no eran invariantes bajo la transformación de Lorentz.

Por eso Dirac (Proc.Roy.Soc. 117 (1928) 610 y 118 (1928) 351) formuló la ecuación que lleva su nombre. Partió de que no podía tratarse de una ecuación de segundo orden respecto del tiempo, ya que la conservación de la probabilidad total no estaría perfectamente asegurada. Por eso supuso que sería de primer orden respecto del tiempo y, como la teoría de la relatividad exige la simetría del espacio con el tiempo, eso implica que la ecuación también debería ser de primer orden con respecto al espacio.

Así consiguió una ecuación invariante, obtenida por razonamiento relativista, sin hacer intervenir la hipótesis del espín, que contenía todas las propiedades del electrón magnético. La función de ondas debería tener 4 componentes, y si el movimiento del electrón es lento con respecto a la luz, las dos primeras son despreciables frente a las otras: se encuentra nuevamente la ecuación de Pauli.

La teoría de Dirac permitió poner en claro la cuestión de la estructura fina y justificó las fórmulas de Sommerfeld. También explica las anomalías magnéticas, ya que atribuye al electrón un momento magnético propio, justificando las fórmulas de Landé.

La ecuación de Dirac admite soluciones correspondientes a estados de energía negativa (esta posibilidad proviene del carácter relativista de las ecuaciones). Pero estos estados, que pueden efectuar transiciones hacia estados positivos, no habían sido observados. Dirac, para justificarlo emitió la siguiente hipótesis: *“todos los estados de energía negativa están ocupados por*

*electrones; los excedentes son los electrones de energía positiva. Cuando un electrón de energía negativa pasa a un estado de energía positiva, aparece un agujero en el mar de electrones negativos, que se manifiesta como una partícula con masa igual a la del electrón y cuya carga es igual a la del electrón pero cambiada de signo. Este agujero puede ser ocupado de nuevo por un electrón con energía positiva con emisión de radiación”*. En 1932 Anderson al hacer colisionar átomos con rayos cósmicos encontró una partícula que cumplía todas las características del agujero de Dirac: el positrón.

#### **5.4. Estado sólido.**

Estudios sobre metales y moléculas aparecen después de la ecuación de Schrödinger (1926) y la estadística de Fermi Dirac (1926), cuando una serie de científicos jóvenes, y por lo tanto sin gran adscripción disciplinar, intentan aplicar la nueva mecánica cuántica a todos los sistemas atómicos posibles. En este trabajo pionero destacaron las universidades de Múnich (Arnold Sommerfeld, Hans Bethe), Leipzig (Werner Heisenberg, Rudolf Peierls), Zúrich (Erwin Schrödinger, Wolfgang Pauli, Félix Bloch) y Gotinga (Max Born, Walter Heitler, Lothar Nordheim). Asimismo, en estos centros acudieron para formarse en cuántica muchos científicos norteamericanos, como Linus Pauling, John Slater, R. S. Mulliken, John Van Vleck, Philip Morse, etc. También destacó la pequeña universidad de Bristol donde trabajó Lennard-Jones hasta que acepta la cátedra de química física de

Cambridge en 1932, siendo sustituido por Nevill Mott.

Los métodos de Born - Oppenheimer (que considera los núcleos fijos) y de Hartree y Fock (o campo autoconsistente), permitieron simplificar la ecuación de Schrödinger al separar la contribución de los núcleos y considerar los electrones como partículas independientes. La principal contribución de John Slater son los determinantes de Slater, utilizados para que la función de ondas total de un sistema de electrones sea antisimétrica (como exigen el principio de exclusión y el postulado de simetrización).

Sommerfeld fue autor en 1927 de una teoría semiclásica de los metales. Bethe estudió la dispersión de las ondas de electrones por los átomos y fue coautor con Sommerfeld en 1933 del clásico "*Electronentheorie der Metalle*". Bloch resuelve en 1928 la ecuación de Schrödinger para un potencial periódico, cuya solución para los electrones de conducción era una onda plana modulada por una función periódica y, aunque él no acabó de verlo, sus soluciones llevaban a la teoría de bandas, desarrollada por Peierls, Bethe, Nordheim, etc.

Eugene Wigner y Frederic Seitz en 1933 aplicaron el método celular al sodio metálico y obtuvieron la primera estructura de bandas. En Cambridge en 1932 Nevill Mott y Harry Jones publicaron "*La teoría de los metales y aleaciones*". En 1940 Seitz escribió el clásico "*La teoría moderna de los sólidos*".

Pero el actual desarrollo de la electrónica se produce cuando la antigua electrónica de válvulas es reemplazada por la electrónica de estado sólido. Ésta

se inicia en 1947 con la invención del *transistor de contacto* por J. Bardeen, W. Brattain y W. Shockley, de los laboratorios de la Bell Telephone, por el que recibieron el premio Nobel de Física en 1956. Éste, lo mismo que muchos otros dispositivos útiles, se obtiene a partir de la unión de semiconductores de tipo n y p.

## **6. La física cuántica y su interpretación**

Señalar que tanto durante su génesis, como posteriormente, la Física cuántica tuvo grandes debates sobre su interpretación. Algunos físicos como de Broglie (y su onda asociada), Schrödinger (reducción al aspecto ondulatorio), Landé y algunos físicos soviéticos (reducción al aspecto corpuscular) e incluso el mismo Einstein, mantuvieron posturas contrarias a la interpretación probabilista. La mayor parte de los físicos, como Bohr, Heisenberg, Born, Pauli o Dirac, defendieron dicha interpretación probabilista (también denominada ortodoxia de Copenhague, la universidad en que trabajaba Bohr), aunque mezclada con altas dosis de filosofía positivista.

El debate tuvo los siguientes hitos. En 1930 el 6º Congreso Solvay estuvo centrado en el magnetismo, por lo que acudió el físico español Blas Cabrera, director del Laboratorio de Investigaciones Físicas y reconocido experto en las propiedades magnéticas de la materia. Pero los ratos libres estuvieron ocupados por la discusión sobre los fundamentos cuánticos a cargo de Bohr

y Einstein. Éste último escéptico con respecto a la interpretación probabilista, proponía experiencias intelectuales que aparentemente cuestionaban las relaciones de indeterminación, lo cual era refutado por Bohr.

En 1935 se propuso la paradoja del gato de Schödinger. Este imaginaba un gato enjaulado con un dispositivo letal que se activaba si se desintegraba un átomo en una sustancia radiactiva. Como se había comprobado en átomos y moléculas la validez del principio de superposición, se podía afirmar que antes de abrir la caja el átomo estaba en una superposición de estados ( $\Psi_{\text{desintegrado}} + \Psi_{\text{no desintegrado}}$ ), por lo que el gato estaría también en estado superposición ( $\Psi_{\text{vivo}} + \Psi_{\text{muerto}}$ ). Hasta que no se realiza la medida, en este caso abrir la caja, no sabemos si el gato está vivo o muerto. A este cambio súbito en la función de estado  $\Psi$  del sistema cuando se realiza la medida, desde un estado superposición a un estado definido, se la denomina “reducción” o “colapso” de la  $\Psi$ , que se convierte en un nuevo principio de la cuántica. Y esta era la idea que Schrödinger quería cuestionar, ya que es imposible que el gato esté vivo y muerto al mismo tiempo antes de abrir la caja. Para resolver esta paradoja, algunos físicos como Eugene Wigner atribuían el colapso a la intervención de un ente supuestamente más allá de la física, la conciencia del observador, pero esta idea es cuestionable, porque muchas veces el observador es un aparato de medida o un ordenador. Otros, como John Wheeler, suponen que cuando se observa el gato, el universo se despliega en dos, uno en el que el gato

sigue vivo y otro en que ha muerto. Esto elimina el colapso, pero resulta una solución muy cara en universos.

Actualmente se acepta que hay un tamaño (o energía) crítico en que la superposición deja de ser válida y que la interacción del sistema con el resto del universo (y una medida es solo una interacción controlada y reproducible) producirá la decoherencia del estado. Esto introduce una evolución continua, reversible y causal de la función de estado regida por la ecuación de Schrödinger y una interacción (o medición) discontinua, irreversible y aleatoria. Según esto las interacciones introducen una irreversibilidad esencial que justifica el carácter universalmente válido del segundo principio de la termodinámica.

También en 1935 se desarrolla la famosa paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen, que aclaró David Bohm en 1951, al proponer un sistema formado por dos electrones con espines antiparalelos que se alejan. Si se mide el espín de uno, instantáneamente sabemos el espín del otro, lo cual contradice el carácter límite de la velocidad de la luz establecido por la relatividad especial. De Broglie y Bohm, consideran que hay partículas con trayectorias bien definidas, guiadas por una onda o potencial cuántico (una variable oculta), que no tiene energía pero puede influir en las partículas. Bohr y otros consideran que se trata de un único sistema y que por lo tanto una medición sobre un electrón es una medición sobre el otro. La verdad es que Bell estableció unas correlaciones para las medidas de estos sistemas, denominadas desigualdades de Bell, el cumpli-

miento de las cuales ha sido verificado experimentalmente en 1982 por Aspect y otros con fotones polarizados, lo cual parece haber concluido la cuestión a favor de la interpretación probabilista. Recientemente se están utilizando sistemas de este tipo (de estados enredados) en aplicaciones prácticas como la criptografía o la computación cuántica.

Esta controversia que duró varias décadas es un buen ejemplo del carácter conflictivo, controvertido, del desarrollo de la ciencia. Su resultado fue la tendencia de muchos textos de física a refugiarse en el incontestado aparato matemático, adornado con algunas ideas confusas sobre la complementariedad y dualidad, del que estos debates estaban marginados como auténticas heterodoxias, sin tener en cuenta que supusieron un gran esfuerzo de aclaración y reformulación de los conceptos cuánticos.

En la actualidad, prácticamente todos los físicos aceptan la interpretación probabilista, y bastante rechazan que esta vaya indisolublemente unida al positivismo, como ya hicieron en su momento Vladimir Fock, Langevin o, más recientemente, Levy-Leblond. Esto es debido al hecho de que el positivismo, entre otras cosas, no aclara la diferencia entre enunciados con significación objetiva y con significación empírica. Los primeros hacen referencia a objetos autónomos no perturbados por medición, como un átomo en estado estacionario (que no absorbe e irradia energía) o un fotón que viaja por un espacio vacío, en el que ningún dispositivo puede detectarlo, absorbiéndolo. Los segundos se refieren a objetos en obser-

vación, medición o, en general, interacción con sistemas macroscópicos, como un haz de electrones que atraviesa un sistema de ranuras. Los positivistas y los que atribuyen la indeterminación únicamente a la observación, intentan reducir la teoría cuántica a enunciados del segundo tipo, lo cual, si fuera cierto, impediría la aplicación de ésta a objetos como los mencionados en el primer tipo de enunciados y, por lo tanto, a la astrofísica o la cosmología.

## **7. Implicaciones didácticas**

La breve historia anterior muestra que un método de enseñanza puramente cronológico para introducir los conceptos tiene algunos inconvenientes que conviene poner de manifiesto. En primer lugar, se introducen las nuevas ideas, en particular desde Planck hasta de Broglie, tal como se hizo en los orígenes de la Física cuántica, sin tener en cuenta los desarrollos posteriores de estas ideas (por ejemplo, limitarse a hablar de órbitas estacionarias en los átomos, no introducir la interpretación dual para los fotones, etc.) ni sus relaciones con los principios de la Física cuántica. Por otro lado, con este método correspondería cronológicamente empezar con la teoría de Planck, lo cual no parece conveniente didácticamente para los niveles medios, porque, como hemos visto en este apartado histórico, ésta presenta una gran dificultad (supone conocimientos de Electromagnetismo y Física estadística) y porque Planck no concibe la expresión  $h\nu$  como cuanto de radiación electromagnética.

Concedemos una gran importancia al desarrollo histórico de las ciencias, no tanto por “contar” la historia del tema tratado, como por extraer de dicha historia los problemas significativos y poner al alumno en situación de abordarlos y resolverlos (Solbes y Traver, 2003; Pérez y Solbes, 2003). Por ello, proponemos iniciar el estudio de los fenómenos cuánticos con dos de los problemas que originaron la crisis de la Física clásica: el efecto fotoeléctrico y la existencia de espectros atómicos.

El procedimiento recomendable históricamente sería mostrar como el efecto fotoeléctrico no puede ser explicado por la teoría electromagnética, por lo que se requieren nuevas hipótesis sobre la naturaleza de la luz que rompen con la teoría clásica. Es conveniente iniciar aquí a los alumnos en la idea de dualidad, para que no incurran en el error de reducir el fotón a su aspecto corpuscular, volviendo a las concepciones de Newton. También es necesario recalcar la cuantización de la energía, que se plantea por primera vez.

A continuación, se debe resaltar la potencia del concepto de fotón, aplicándolo a nuevos fenómenos como el efecto Compton (que solo se aborda a nivel cualitativo) y los espectros discretos, para evitar la visión simplista de que las teorías se abandonan a consecuencia de unos pocos resultados negativos. En ambos casos es necesario mostrar como la Física clásica era incapaz de explicarlos. Al introducir el modelo de Bohr es necesario insistir en la cuantización de la energía y del momento angular y en la idea de estado estacionario.

Algunos autores se manifiestan contra el uso del modelo de Bohr para evitar una descripción del átomo que incluya órbitas (Fischler y Lichtfeldt, 1992). Parece conveniente seguir la opción contraria por las siguientes razones históricas (Solbes y Traver, 2003), válidas no solo en esta, sino en otras situaciones:

- Para familiarizar a los alumnos con la forma de trabajo de los científicos que elaboran modelos para explicar los problemas hasta que surgen dificultades que obligan a cambiarlos. Como hemos visto, la utilización de los modelos o teorías clásicos o precuánticos (semiclásicos) es algo frecuente en la práctica corriente de la Física y los científicos no se privan de hacerlo siempre que se encuentran en el ámbito de los hechos que explicaba el anterior modelo, en el dominio de validez de la anterior teoría, es decir, como aproximaciones.
- Para evitar la imagen que son únicamente las limitaciones del Electromagnetismo las que justifican la introducción de ideas cuánticas, dado que la crítica del concepto de trayectoria (órbita) contribuye a mostrar también las limitaciones de la Mecánica clásica.

La breve revisión histórica aquí realizada pone de manifiesto la gran complejidad del desarrollo histórico. En primer lugar como a pesar de la oposición de científicos como Compton sus propios experimentos confirman la hipótesis heurística de Einstein, lo cual pone de manifiesto cómo resulta de excesivo negar el uso de criterios para evaluar

los desarrollos de la ciencia o equiparar la ciencia con cualquiera otro producto cultural (Osborne, 1996) como hacen algunos filósofos y sociólogos de la ciencia (Barnes, Latour...) o como a pesar de los éxitos del modelo de Bohr, pronto surgieron dificultades que obligaron a modificarlo y sustituirlo por un modelo más complejo, el de Sommerfeld.

También vemos como los mismos fenómenos pueden ser explicados por teorías diferentes, la mecánica matricial o cuántica de Heisenberg, Born y Jordan y la mecánica ondulatoria de Schrödinger. Este último demostró la identidad de ambas, lo cual permitió que los físicos, mucho más familiarizados con sus ecuaciones diferenciales que con las matrices de Heisenberg, utilizaran casi exclusivamente la teoría de Schrödinger, cosa también recomendable a nivel didáctico.

Así mismo, hemos visto como los postulados de la física cuántica (Dirac, De Broglie) son la respuesta a sus preguntas básicas: ¿cómo se define el estado de un sistema?, ¿qué magnitudes lo caracterizan?, ¿cuáles son los valores posibles de cada magnitud?, ¿cuál es la probabilidad de encontrar cada uno de esos valores si se realiza una medida? y ¿cómo evoluciona el estado del sistema en el tiempo? Las ideas clave de cuantización, comportamiento cuántico de los cuantos (fotones, electrones, etc.) y probabilismo, son las que llevaron a dichos postulados.

Por otra parte, hemos señalado como en el marco de la teoría cuántica surgen aportaciones que después permitirán el desarrollo de la célula fotoeléctrica, el microscopio electrónico, el máser y el

láser, la microelectrónica (base de los ordenadores, las telecomunicaciones, la robótica, la automatización, etc.), lo que pone de manifiesto las múltiples relaciones CTS del tema y que las nuevas tecnologías son mayoritariamente cuánticas (Han, 1992).

Y, aunque la idea de un paralelismo estricto entre algunas concepciones alternativas de los estudiantes e ideas científicas erróneas aparecidas en la historia de la ciencia ha sido cuestionada, la verdad es que a partir de los obstáculos que se manifiestan a lo largo de la historia de la ciencia se puede extraer información sobre las dificultades de los estudiantes (Saltiel y Viennot, 1985). Destacamos las ideas de de Broglie de partícula y onda, de Schrödinger que considera al electrón difundido (solo onda), la complementariedad de Bohr, que mantiene las imágenes corpuscular y ondulatoria, aunque no existan nunca al mismo tiempo, las contradicciones que ponen de manifiesto las relaciones de Heisenberg, etc.

Además, la revisión histórica nos permite detectar errores de los textos como, por ejemplo, interpretar el fotón como una partícula al no aplicarles la dualidad, atribuir a Davisson y Germer el diagrama de difracción en circunferencias concéntricas (semejante al obtenido por Debye y Scherrer para los rayos X), cuando en realidad éste fue obtenido por G. P. Thomson y el que obtuvieron Davisson y Germer fue un diagrama de puntos (semejante al obtenido por Von Laue para los rayos X), etc.

Por último, historiadores como Kragh (2007) advierten:

“A escala ontológica, los cambios han sido sin duda muy profundos, en la mayor parte como resultado de la revolución cuántica... La mecánica cuántica nos ha proporcionado estructuras fundamentales que no tienen similitud ninguna con todo lo que puede ser percibido o medido directamente. Nuestras creencias actuales sobre lo  $q$  en última medida constituye el mundo distan mucho de las de la década de 1890, cuando todavía tenía sentido pensar en la materia como una colección de bloques en miniatura.”

Es decir, parece que la principal dificultad que tienen los alumnos en el aprendizaje de la física cuántica es ontológica: No son capaces de comprender que los electrones, fotones, etc., no son ni ondas ni partículas clásicas, sino objetos nuevos con un comportamiento nuevo, el cuántico. Por otra parte, también puede aparecer una dificultad epistemológica, relacionada con el que se puede o no conocer y, por lo tanto, con las relaciones de indeterminación de Heisenberg y con la interpretación probabilista.

En consecuencia, es recomendable acudir a las interpretaciones más recientes (Feynman, 1971; Balibar y Levy-Leblond, 1984) que consideran que los electrones, fotones, etc. no son ni ondas ni partículas clásicas, sino objetos nuevos (los cuantos) con un comportamiento cuántico. En consecuencia, se cumplen las relaciones de indeterminación y se hace necesario un nuevo modelo para describir el estado y evolución de los cuantos, diferente de los utilizados para las partículas y ondas clásicas: la función de ondas y su

interpretación probabilista. Y aplicar este concepto al estudio de fenómenos previos al mismo: el efecto fotoeléctrico, los espectros, la difracción de electrones, etc.

## Conclusiones

Por todo lo expuesto podemos concluir que es interesante e importante tener en cuenta las aportaciones que puede ofrecer la historia de la física, para la investigación didáctica sobre las ideas de los estudiantes, para favorecer su actitud positiva hacia la física, para cambiar la enseñanza de la ciencia haciéndola más contextualizada en la tecnología y la sociedad, y para mejorar el aprendizaje. Estas aportaciones son coherentes con una enseñanza de la física cuántica en la secundaria mediante actividades diseñadas en consonancia con un modelo de enseñanza-aprendizaje como investigación (Gil y otros, 1991) que pretende producir cambios conceptuales, de procedimientos y de actitudes y valores en los estudiantes.

## Referencias bibliográficas

- BALIBAR, F. y LEVY-LEBLOND, J. M. (1984) *Quantique. Rudiments* Paris: Intereditions.
- BORN, M. (1971) *Ciencia y conciencia en la era atómica*. Madrid: Alianza
- BUTLER, C., DAVIES, B. JACQUIER, M. & McCARTHY (Ed). (1972). *The concept of the atom*. Heineman Educational. Victoria.
- DE BROGLIE, L. (1965) *La física nueva y los cuanta*. Losada. Buenos Aires

- DIRAC, P.A.M. (1967). *Principios de la mecánica cuántica*. Barcelona: Ariel
- DRIVER, R. GUESNE, E. y TIBERGHIE, A. (1989). *Ideas Científicas en la infancia y la adolescencia*. Madrid: Morata.
- DUGAS, R. (1950). *Histoire de la Mécanique*. Ed. Du Griffon Neuchatel,
- ECKERT, M. y SCHUBERT, H. (1991). *Cristales, electrones, transistores. Del gabinete del sabio a la investigación industrial*. Madrid : Alianza.
- FEYNMAN, R. (1971). *Física. Vol 1. Mécanica, radiación y calor*. Fondo Educativo Interamericano.
- PETRI, J. y NIEDDERER, H. (1998). A learning pathway in high school level quantum atomic physics. *International Journal of Science Education*. 20 (9), 1075-1088.
- FORMAN, P. (1984). *Cultura en Weimar, causalidad y teoría cuántica 1918-1927*. Madrid: Alianza.
- GALINDO, A. y PASCUAL, P. (1978). *Mecánica cuántica*. Madrid: Alambra.
- GIL, D., CARRASCOSA, J., FURIÓ, C. y MTNEZ-TORREGROSA, J. (1991). *La Enseñanza de las Ciencias en la Educación Secundaria*. Barcelona: Horsori-ICE Universidad de Barcelona.
- GIL, D. y SOLBES, J. (1993). The introduction of modern physics: overcoming a deformed vision of science, *International Journal of Science Education*, 15 (3), pp. 255-260.
- GRIBBIN, J. (1988). *En busca del gato de Schrödinger*, Barcelona: Salvat.
- HAN, M.Y. (1992). *La vida secreta de los cuantos*, Aravaca: Mc Graw-Hill.
- HEISENBERG, W. (1979) *Encuentros y conversaciones con Einstein y otros ensayos*. Madrid: Alianza.
- JOHNSTON, I., CRAWFORD, K. y FLETCHER, P. (1998). Student difficulties in learning quantum mechanics, *International Journal of Science Education*. 20 (4), 427-446.
- KALKANIS, G., HADZIDAKI, P., STAVROU, D. (2003). An instructional model for a radical conceptual change towards quantum mechanics concepts. *Science Education*. 87 (2), 257-280.
- KRAGH, E. (2007). *Generaciones Cuánticas*. Madrid. Tres Cantos.
- LAPIEDRA, R. (2004), *Els dèficits de la realitat i la creació del món*, Universitat de València.
- MASON, S. F. (1986), *Historia de las ciencias, vol 5. La ciencia del siglo XX*, Madrid: Alianza.
- MATTHEWS, M. R. (1991). Un lugar para la historia y la filosofía en la enseñanza de las Ciencias. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 11-12, 141-155.
- MERHA, J. (1976). *The birth of quantum mechanics*, Ginebra: Ed. CERN.
- MORENO, A. (1987). *Aproximación a la física*, SP Junta de Cdades Castilla-La Mancha, Ciudad Real.
- NAVARRO J. (2009). *Una ecuación y un gato. Schrödinger*. Nivola, Tres Cantos
- OSBORNE, R. (1996). Beyond constructivism. *Science Education*, 80 (1), 53-82.
- PÉREZ, H. y SOLBES, J. (2003). Algunos problemas en la enseñanza de la Relatividad, *Enseñanza de las Ciencias*, 21 (1), pp. 135-146.

- PETRI, J. y NIEDDERER, H. (1998). A learning pathway in high school level quantum atomic physics. *International Journal of Science Education*. 20 (9), 1075-1088.
- RAE, A. (1989), *Física cuántica, ¿ilusión o realidad?*, Madrid. Alianza.
- ROCARD, M. et al. (2007). *Science education Now: A renewed Pedagogy for the future of Europe*. European Communities: Belgium.  
[http://ec.europa.eu/research/science-society/document\\_library/pdf\\_06/report-rocard-on-science-education\\_en.pdf](http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf)
- SALTIEL, E. y VIENNOT, L. (1985). ¿Qué aprendemos de las semejanzas entre las ideas históricas y el razonamiento espontáneo de los estudiantes? *Enseñanza de las Ciencias*, 3(2), 137-144.
- SÁNCHEZ RON, J.M. (1992). *El poder de la ciencia. Historia socio-económica de la física (s.XX)*, Madrid: Alianza
- SCHRÖDINGER, E. (1975). *¿Qué es una ley de la naturaleza?* México: Fondo de cultura económica.
- SELLERI, F. (1986). *El debate de la teoría cuántica*, Madrid: Alianza.
- SOLBES, J. (1996). La física moderna y su enseñanza, *Alambique*. 10, pp. 59-67.
- SOLBES, J., LOZANO y GARCÍA MOLINA, R. (2008). Juegos, juguetes y pequeñas experiencias tecnocientíficas en la enseñanza aprendizaje de la física y química y la tecnología, *Investigación en la escuela*, 65, 71-88.
- SOLBES, J., MONTSERRAT, R. y FURIÓ, C. (2007). El desinterés del alumnado hacia el aprendizaje de la ciencia: implicaciones en su enseñanza. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales*, 21, 91-117.
- SOLBES, J. y TRAVER, M. (2001). Resultados obtenidos introduciendo la historia de la ciencia en las clases de física y química: mejora de la imagen de la ciencia y desarrollo de actitudes positivas, *Enseñanza de las ciencias*, 19 (1), 151-162.
- SOLBES, J. y TRAVER, M. (2003). Against negative image of science: history of science in the physics & chemistry Education, *Science & Education*, 12, 703-717.
- TATON, R. (Ed) (1973). *La ciencia contemporánea (s XX)*, Destino, Barcelona.
- TIPLER, P. A.. (1985). *Física moderna*. Barcelona: Reverté.
- VAN DER WAERDEN, B. L. (1968). *Sources of quantum mechanics*. New York: Dover.